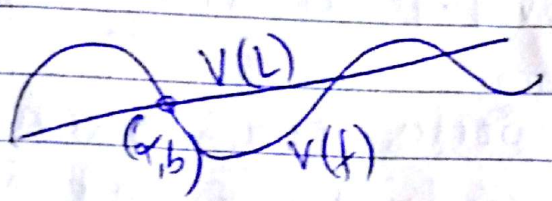
02/05/17 (6º Μάθημα)

$f(x,y)\in \mathbb{C}[x,y]$, $\deg f = n$, $V(f)\in \mathbb{C}^2$



$L:\ \begin{cases} x=\alpha+\lambda t \\ y = b+\mu t \end{cases}$ | κλίση: $\frac{\mu}{\lambda}$ $\Big\}\Rightarrow$

$f(x,y)=0.$

$\Rightarrow$ Έχω να λύσω $f(\alpha+\lambda t, b+\mu t)=0$ (Θέλω να βρω σημ. τομής της $V(f)$ με την $V(L)$)

Ορισμός: Ονομάζουμε πολλαπλότητα τομής της ευθείας L και της καμπύλης $V(f)$ στο $P=(\alpha,b)$ την πολλαπλότητα της ρίζας 0 στο πολυώνυμο $f(\alpha+\lambda t, b+\mu t)$.

Δηλαδή $f(\alpha+\lambda t, b+\mu t)=t^r g(t)$ και $t \nmid g(t)$.
Το r ονομάζεται πολλαπλότητα τομής της $V(f)$ με την L στο σημείο $P=(\alpha,b)$.
$= I_{(\alpha,b)}(f,L)$.

Παίρνω ανάπτυγμα Taylor:

$$f(\alpha+\lambda t, b+\mu t) = f(\alpha,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,b)\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,b)\mu\right)t +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,b)\lambda^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha,b)\lambda\mu + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,b)\mu^2\right)t^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^r}(\alpha,b)\lambda^r + \binom{r}{1}\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-1}\partial y}(\alpha,b)\lambda^{r-1}\mu + \dots +\right.$$

$$\left.+\binom{r}{r}\frac{\partial^r f}{\partial y^r}(\alpha,b)\mu^r\right)t^r + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(\alpha,b)\lambda^n +\right.$$

$$\left.+\binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(\alpha,b)\lambda^{n-1}\mu \dots + \binom{n}{n}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(\alpha,b)\mu^n\right)t^n$$

i) $f(\alpha,b)\neq 0 \Rightarrow (\alpha,b)\notin V(f) \Rightarrow I_{(\alpha,b)}(f,L)=0$

$\rightarrow$

ii) $f(\alpha,b)=0$, : Έχω 2 περιπτώσεις:

α) $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,b)\neq 0$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,b)\neq 0$

Τότε το (α,b) ονομάζεται <u>απλό</u> σημ. της $V(f)$.

Για όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο (α,b) (εκτός από μία) ο συντελεστής τομής $I_{(\alpha,b)}(L,f)=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,b)\lambda+\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,b)\mu=0\\ x=\alpha+\lambda t\\ y=b+\mu t\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\overset{(x-\alpha)}{\lambda t}+\frac{\partial f}{\partial y}\overset{(y-b)}{\mu t}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,b)}_{\text{Εφ/νη της } V(f) \text{ στο } (\alpha,b).}$$

β) $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,b)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,b)\Rightarrow$ το (α,b) καλείται ιδιόμορφο.

Για την εφ/νη $I_{(\alpha,b)}(L,f)\geq 2$ (ουσιαστικά πόσα t^k μπορώ να βγάλω κοινά στο Taylor)

ενώ $\forall$ άλλη L έχω $I_{(\alpha,b)}(L,f)=1$.

α) $f(\alpha,b)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,b)\neq 0$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,b)\neq 0$

Η εφ/νη στο (α,b) δίνεται:

$$L: \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,b)(x-\alpha)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,b)$$

- Αν $I_{(\alpha,b)}(L,f)>2$ τότε το (α,b) λέγεται σημείο καμπής

Τα σημεία καμπής είναι ΠΑΝΤΑ πεπερασμένα.

β) $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,b) = 0 \Rightarrow (\alpha,b)$: ιδιόμορφο.

$- \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,b) \neq 0$ ή $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,b) \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,b) \neq 0$.

Οι ευθείες L' που διέρχονται απ' το (α,b) τέμνουν την καμπύλη με πολλαπλότητα 2 εκτός, από το πολύ, 2 ευθείες (εφαπτόμενες στο ιδιόμορφο σημείο).

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,b)\lambda^2 t^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,b)\lambda\mu t^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,b)\mu^2 t^2 = 0 \\ x = \alpha + \lambda t \\ y = b + \mu t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,b)(x-\alpha)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,b)(x-\alpha)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,b)(y-b)^2 = 0$$

ομογενής ως προς $(x-\alpha)$, $(y-b)$

σπάει σε γινόμενο α'-βαθμίων (σε λίγο η απόδειξη) δηλ. σε 2 ευθείες οι οποίες λέγονται εφαπτόμενες ως προς $(x-\alpha)$, $(y-b)$.

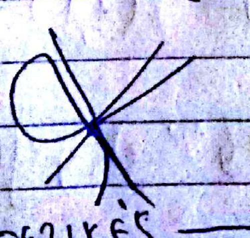
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,b)(x-\alpha)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,b)(x-\alpha)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,b)(y-b)^2 = 0.$$

$$\Rightarrow (\lambda_1(x-\alpha) + \mu_1(y-b))(\lambda_2(x-\alpha) + \mu_2(y-b)) = 0 \Rightarrow$$

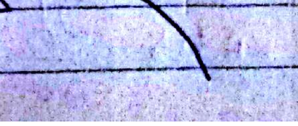
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1(x-\alpha) + \mu_1(y-b) = 0 \\ \lambda_2(x-\alpha) + \mu_2(y-b) = 0 \end{cases}$$

οι 2 εφαπτόμενες στο (α,b). (ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟ ΟΤΙ ΟΙ ΕΥΘΕΙΕΣ ΑΥΤΕΣ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ).

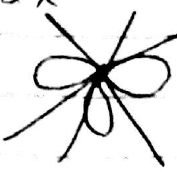
• ίδιες



• διαφορετικές



$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,b) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,b) = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}$$ → ιδιόμορφο 3ο σημείο κ.ο.κ



Θεώρημα: Έστω $f(x,y)\in \mathbb{C}[x,y]$ ομογενές πολυώνυμο βαθμού d. Τότε το f αναλύεται ως γινόμενο d το πλήθος πρωτοβαθμίων (όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους)

Απόδειξη: $f(x,y) = \alpha_0 y^d + \alpha_1 y^{d-1}x + \alpha_2 y^{d-2}x^2 + \dots + \alpha_i y^{d-i}x^i =$

$$= y^d\left(\alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{y}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\dots+\alpha_d\left(\frac{x}{y}\right)^d\right) =$$

$$\boxed{K[x,y,\tfrac{1}{y}] \simeq K[x,y,z]/\underbrace{(yz-1)}_{\text{ιδεώδες}}}$$

• Έστω c: ο μεγαλύτερος φυσικός τέτοιος ώστε $\alpha_c \neq 0$, $c\le d$

$$= y^d\left(\alpha_0+\alpha_1\left(\frac{x}{y}\right)+\alpha_2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\dots+\alpha_c\left(\frac{x}{y}\right)^c\right) =$$

κάθε πολ/μο στο $\mathbb{C}$ έχει ρίζες

$$y^d\left(\alpha_c\left(\frac{x}{y}-\rho_1\right)\cdot\left(\frac{x}{y}-\rho_2\right)\cdots\left(\frac{x}{y}-\rho_c\right)\right) =$$

$$= y^{d-c}\alpha_c(x-\rho_1 y)(x-\rho_2 y)\cdots(x-\rho_c y)$$

Παραδείγματα:

① $f = x^8 - 3x^3y^4 + 7x^2y^{11} - 5y^3$.

Παρατηρώ ότι $(1,1)\in V(f) \Rightarrow f(1,1) = 1-3+7-5=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = (8x^7 - 9x^2y^4 + 14xy^{11})(1,1) = 8-9+14 = 13\neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = [-12x^3y^3+77x^2y^{10}-15y^2](1,1) = 50\neq 0$$

Αφού τουλ. μία από τις $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\neq 0$

το (1,1) είναι απλό και άρα από τον τύπο μπορώ να βρω την εφαπτόμενη.

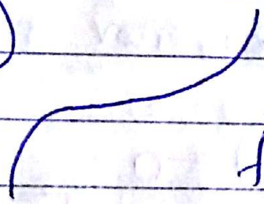
$L: \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-b) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{13(x-1) + 50(y-1) = 0}$.

Για να ελέγξω αν είναι σημ. καμπής: $x = 1 + 50t$
$y = 1 + 30t$

Αντικαθιστώ στην f:
$f(1+50t, 1-13t) = \dots = t^r(\dots)$
Αν $r \geq 2 \Rightarrow$ τότε είναι σημείο καμπής.

(2)



$V(y-x^3)$. Μελέτη στο $(0,0)$.
$f = y - x^3$

Είναι: $f(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0) \in V(y-x^3)$

$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -3x^2\Big|_{(0,0)} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial y} = 1\Big|_{(0,0)} = 1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ όλα τα σημεία της $V(f)$ (άρα και το $(0,0)$) είναι απλά.

Εφαπτόμενη: $\overset{0}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}(x-0) + \overset{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}(y-0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y=0}$.

Παραμετρική μορφή της $y=0$: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$

Λύνω το σύστημα $\left.\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ y - x^3 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow -t^3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^3(-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ αφού η πολλαπλότητα της ρίζας στο $(0,0)$ είναι $3 > 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ το $(0,0)$ είναι σημείο καμπής.

(**) Άσκηση: Βρείτε τα ιδιόμορφα σημεία (αν υπάρχουν) της καμπύλης $V(y^2-x^3-x^2) \subset \mathbb{R}^2$ (Για εξετάσεις).

Λύση: Θέλω: • $f(x,y)=0$

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Άρα θα λύσω αυτό το σύστημα.

Αφού $V(y^2-x^3-x^2) \subset \mathbb{R}^2$ θα ~~[illegible]~~ πάρω μόνο σημεία του $\mathbb{R}^2$.

Θέλω:
$$\left.\begin{aligned} & y^2-x^3-x^2=0 \\ & \frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2-2x=0 \\ & \frac{\partial f}{\partial y} = 2y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Άρα αν υπάρχουν, βρίσκονται στον x-άξονα

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^3-x^2=0 \\ -3x^2-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2(x+1)=0 \\ -x(3x+2)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ • $x=0$ διπλή ή $x=-1$

• $x=0$ ή $x=-2/3$.

και $y=0$.

Άρα κοινή λύση του συστήματος $x=0 \wedge y=0 \Rightarrow (0,0)$ ιδιόμορφο σημείο.

Εφαπτόμενες στο ιδιόμορφο σημείο:

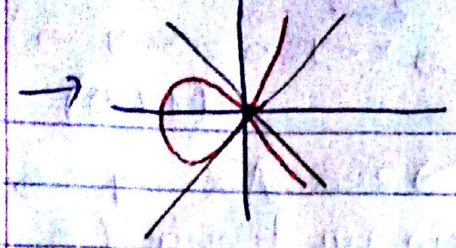
~~[illegible]~~

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x-2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Άρα: $-2(x-0)^2 + 2\cdot 0 \cdot xy + 2(y-0)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2+2y^2=0 \Rightarrow y^2-x^2=0 \Rightarrow y=\pm x \longrightarrow$

$\otimes$



$E(f) = y^2 - x^2$

$\longleftrightarrow$ ομογενή εξίσωση

Προβολικός Χώρος : $F(x,y,z) = 0$

Ιδιόμορφο σημείο : Θέλω : $\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0}_{\text{και οι 3 βαθμού } n-1}$.

Παράδειγμα: Βρείτε τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης
$V\left((x^2-y^2)^2 + 2(x^2-6y^2)z^2\right) \subset P^2_{\mathbb{C}}$

Λύση: Αφού είμαστε στο προβολικό χώρο:
- $(0,0,0) \notin P^2_{\mathbb{C}}$ (άρα θα απορρίπτεται),
- ψάχνω 3 συντεταγμένες,
- δεν υπάρχει μοναδική αναπαράσταση για τα σημεία.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \cancel{2}(x^2-y^2)\cdot\cancel{2}x + \cancel{2}z^2\cdot\cancel{2}x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2-y^2)(-2y) + 2z^2(-12y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 4(x^2-6y^2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(x^2-y^2+z^2) = 0 \\ y(-x^2+y^2-6z^2) = 0 \\ z(x^2-6y^2) = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Μας δίνει τη σχέση μεταξύ x, y.

Άρα $z = 0$, $x = \sqrt{6}\,y$, $x = -\sqrt{6}\,y$.
Άρα έχω 3 περιπτώσεις

- 1η περίπτωση: $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(x^2-y^2) = 0 \\ y(-x^2+y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} - z=0,\ x=0,\ y=0 \Rightarrow (0,0,0) \notin P^2_{\mathbb{C}} \\ - z=0,\ x^2-y^2=0,\ y=0 \Rightarrow (0,0,0) \notin P^2_{\mathbb{C}} \\ - z=0,\ x=0,\ -x^2+y^2=0 \Rightarrow (0,0,0) \notin P^2_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

$- z=0,\ x^2-y^2=0,\ -x^2+y^2=0 \Rightarrow$ $\longrightarrow$

$z=0$, $(x-y)(x+y)=0$ $\to$ $z=0$, $x-y=0 \Rightarrow x=y \to$ κάθε σημείο της μορφής $(1,1,0)$

$\to z=0 \wedge x=-y \to$ κάθε σημείο της μορφής $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$.

Άρα $(1,1,0)$, $(-1,1,0)$: ιδιόμορφα σημεία.

• 2η περίπτωση: $x=\sqrt{6}y \to \begin{cases} x(x^2-y^2+z^2)=0 \\ y(-x^2+y^2-6z^2) \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} \sqrt{6}y(6y^2-y^2+z^2)=0 \\ y(-6y^2+y^2-6z^2)=0 \end{cases} \Rightarrow$ 4 περιπτώσεις: $y=0$,

$x=\sqrt{6}y$, $y=0$	$x=\sqrt{6}y$, $y=0$, $-5y^2-6z^2=0$	$x=\sqrt{6}y$, $5y^2+z^2$, $y=0$	$x=\sqrt{6}y$, $5y^2+z^2=0$, $-5y^2-6z^2=0$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$(0,0,1)$ $\forall \lambda\in\mathbb{C}$ ιδιόμορφο σημείο.	$(0,0,0)\notin\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$	$(0,0,0)\notin\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$	$(0,0,0)\notin\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Όμοια για την $x=-\sqrt{6}y$.

Άρα τα ιδιόμορφα σημεία είναι τα:
$(1,1,0)$, $(-1,1,0)$, $(0,0,1)$.

Ορισμός: Έστω F ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $d\geq 1$. Η Εσσιανή του F είναι η ορίζουσα:

$$H_F=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2F}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2F}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2F}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2F}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2F}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

<u>Θεώρημα</u>: Ένα σημείο $P=(x_0, y_0, z_0)$ μιας καμπύλης $V(F)$ είναι σημείο καμπής της $V(F) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P \in V(F)$ και $H_F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

<u>Μέθοδος Υπολογισμού των σημείων καμπής της $V(F)$.</u>

Θέλω: $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ H_F(x,y,z) = 0. \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{λύνω}}$ και παίρνω μόνο τα απλά σημεία.

(και πάντα απορρίπτω το $(0,0,0)$).

Κάθε σημείο είναι είτε ιδιόμορφο ~~είτε~~ είτε σημείο καμπής.